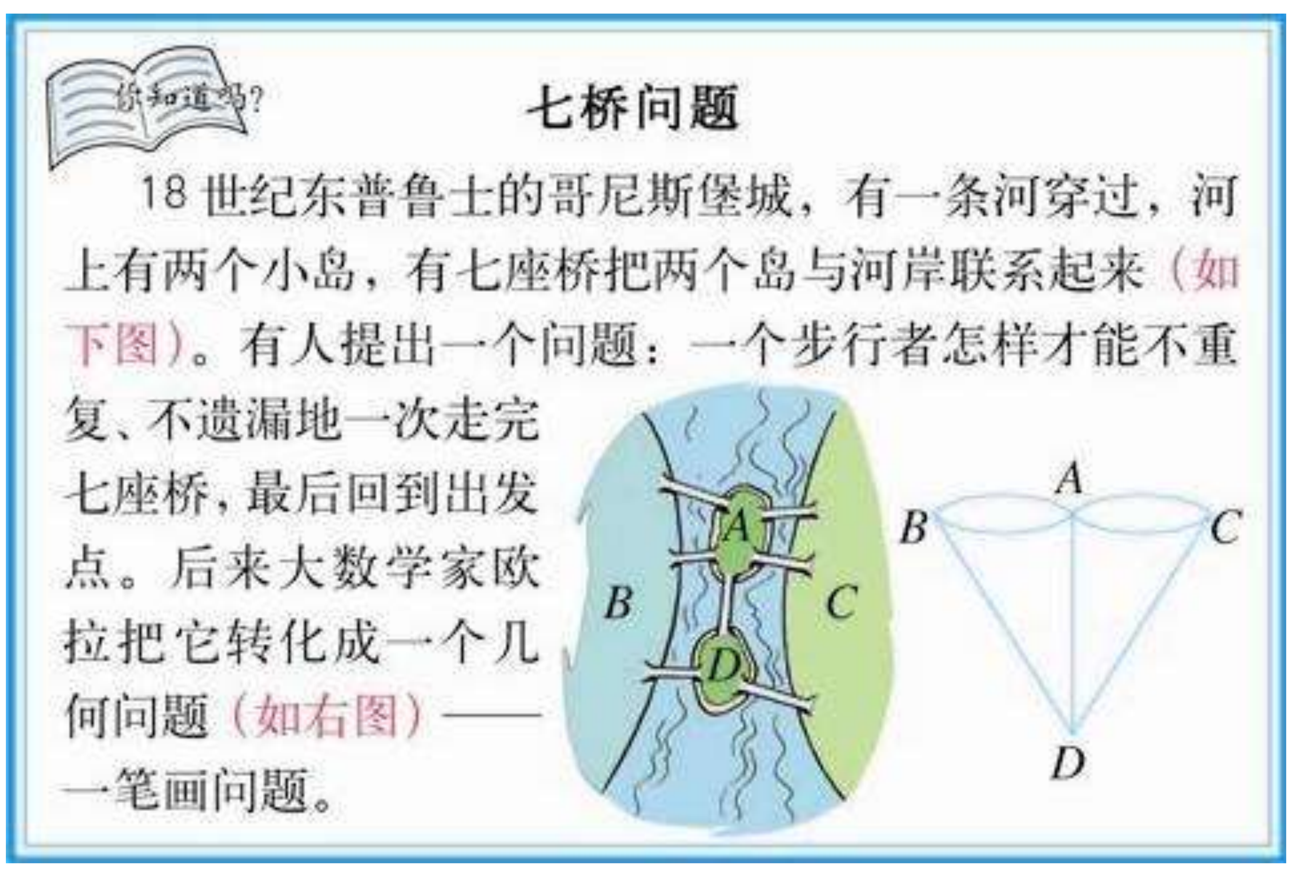
典型欧拉定向计数问题的多项式时间算法

孟泊宁，王踞秋，夏盟佶

发表于ICALP2025，将收录于[LIPIcs, Volume 334, ICALP 2025] - Paper No 98

联系人：孟泊宁 mengbn@ios.ac.cn

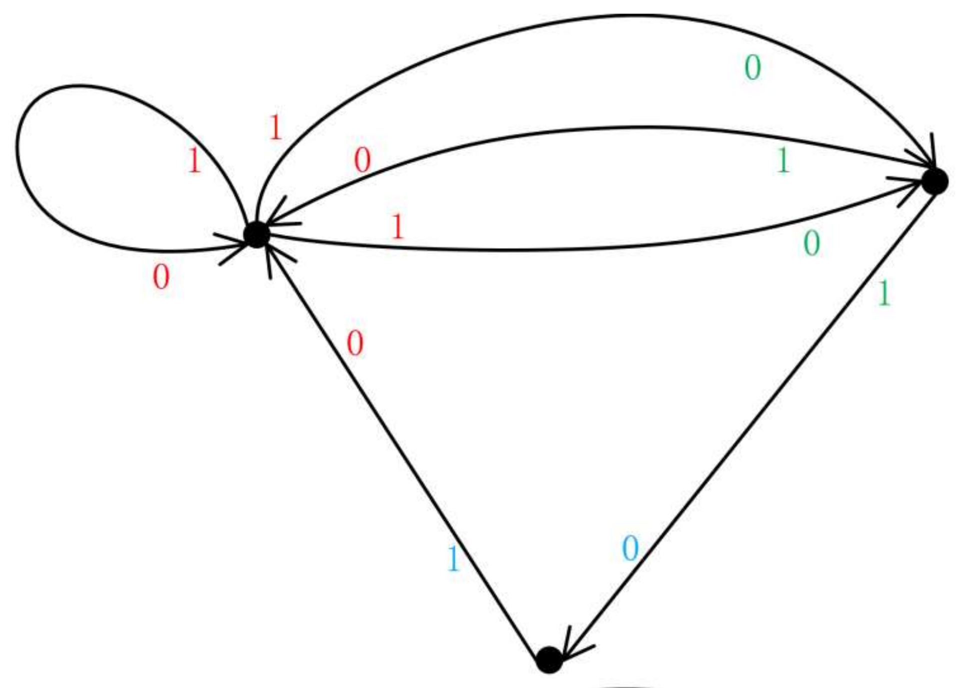


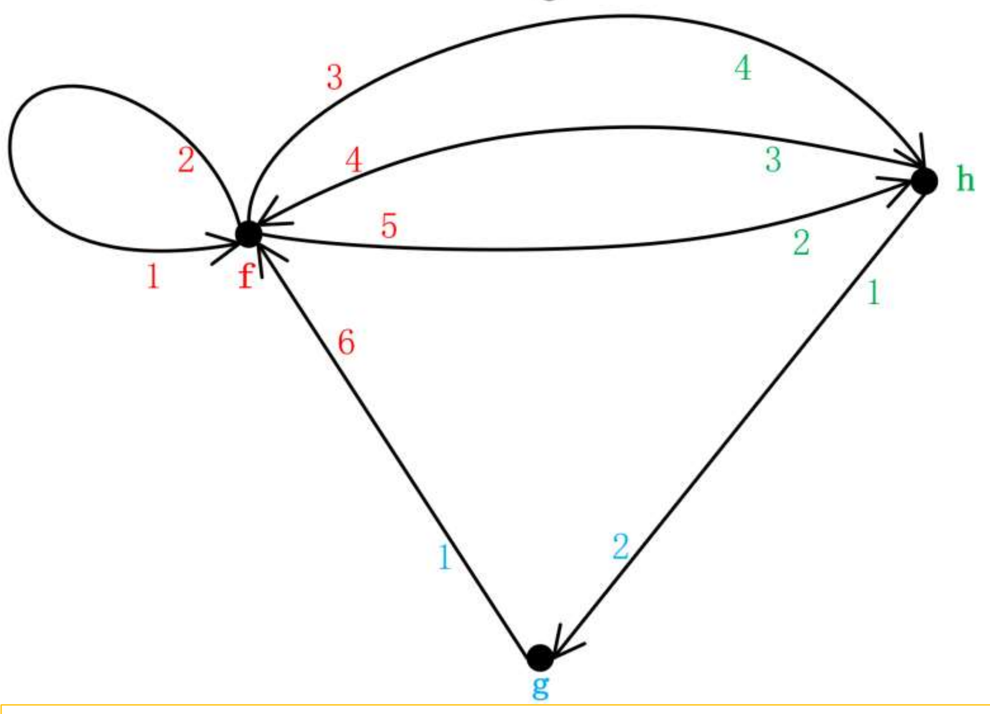
你知道吗?

七桥问题

18 世纪东普鲁士的哥尼斯堡城，有一条河穿过，河上有两个小岛，有七座桥把两个岛与河岸联系起来（如下图）。有人提出一个问题：一个步行者怎样才能不重复、不遗漏地一次走完七座桥，最后回到出发点。后来大数学家欧拉把它转化成一个几何问题（如右图）——一笔画问题。

数学人教版六年级下册介绍了哥尼斯堡七桥问题（左图）。1736年，29岁的欧拉提交了《哥尼斯堡的七座桥》的论文，解答问题的同时，开创了数学的一个新的分支——图论。这一问题也引出了欧拉定向的概念。





一个欧拉定向（Eulerian orientation）为图中的每条边指定一个方向，使得每个顶点的出度等于入度。在连通图中，存在欧拉迹（Eulerian trail，即“一笔画”）当且仅当存在一个欧拉定向。给定一个欧拉定向，每条边的方向可通过两个布尔值表示：以“头”为 0、“尾”为 1。

计算图中欧拉定向的数量是#P难问题。本研究聚焦于其复数权重扩展版本——欧拉定向计数问题（#EO）。#EO问题由函数集合 F 定义，记为 #EO(F)。在该问题中，每个顶点被赋予一个函数f∈F，函数f的输入是按特定顺序排列后围绕该顶点的半边。对于任意欧拉定向，其权重定义为所有顶点函数输出值的乘积；而问题的输出即为所有欧拉定向权重的和。

#EO问题的复杂性分类研究具有重要意义。 该研究不仅与经典物理中六顶点模型配分函数的计算难度高度相关，更是刻画布尔定义域Holant问题复杂性的关键路径（自2008年以来，该领域已发表十余篇CCF-A/B类论文，但其复杂性仍未得到完全刻画）。

上图展示了一个欧拉定向及其对应的布尔赋值表示（头=0，尾=1）。下图展示了一个#EO问题实例上的欧拉定向，该定向的权重为f(011010)g(10)h(1010)（由顶点函数输出值的乘积计算得出）。

论文成果

本论文完整刻画了当F是低元函数集或纯粹函数集时#EO(F)复杂性，并给出了传递函数集合在类型条件下的多项式时间算法。

核心概念定义（注：通过交换定义中的 0/1 值可定义纯粹函数与传递函数的对偶形式，其复杂性结论与原形式一致）：

低元函数（Quaternary or binary signature）：函数输入变量数不超过 4。

纯粹函数（Pure signature）：对函数支撑集（support）的仿射扩张（affine span）中的任意串，其中1的个数都不少于0。

传递函数（Rebalancing signature）：若将函数任意k个变量固定为0，则其必存在k个变量被固定成1。

类型条件（Type requirement）：在任意变量两两划分下，函数都具有易解类A的形式；或在任意变量两两划分下，函数都具有易解类P的形式。

注1：低元函数集的所有易解类均可由纯粹函数或其对偶形式表示；传递函数集严格包含纯粹函数集。

注2：在所有结论中，类型条件均是多项式时间可解性的必要条件。

算法部分概述

所有易解类的算法都利用了传递函数的**收发机制：**

设f是传递函数：

（接收）若固定其变量x=0，则存在变量y被固定为1。

（发送）y被固定为1，对应边的另一端必然被固定为 0。

纯粹函数的易解类对应了**主动收发机制。**此过程中如果存在初始被固定为0的变量，则会不断触发收发机制，简化问题，直到满足终止条件。满足终止条件时，类型条件将带来算法。

传递函数的易解类对应了**被动收发机制。**此过程会寻找具有良好性质的变量，通过假定该变量被固定为0来触发收发机制，从而找到一系列总与其取值相同或相反的变量，从而简化问题。问题被完全简化时，类型条件将带来算法。

复杂性部分概述

低元函数集复杂性证明的核心依赖于六顶点模型（即由单个四元函数定义的#EO问题）的复杂性结论。通过构造性归约，本文进一步证明了：当集合F中特定易解函数组合出现时，将导致#EO(F)具有#P难性。

纯粹函数集复杂性证明则基于函数代数性质：若类型条件未被满足，总能构造出可归约至#P难问题的函数组合，从而确立其#P难性。