From an odd arity signature to a Holant dichotomy

带奇数元函数的Holant问题二分定理

孟泊宁，王踞秋，夏盟佶，郑加毅

CCC 2025

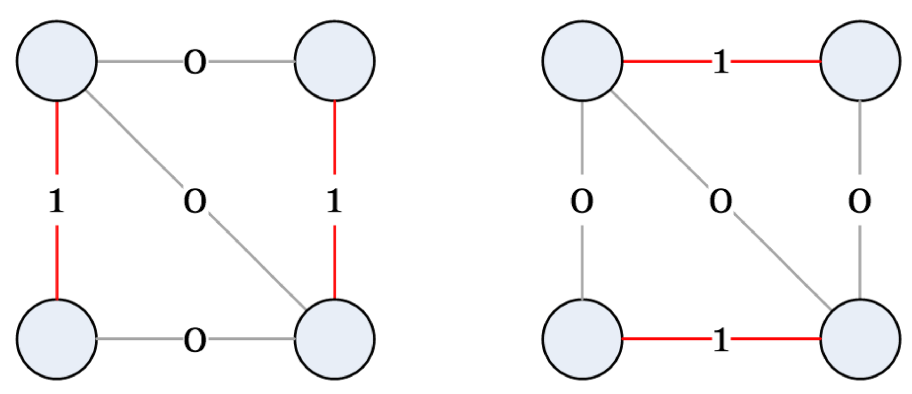
联系方式：郑加毅 18410352810 | zhengjy@ios.ac.cn

Holant：定义在图上的计数问题

在**张量网格Ω**上，
每条**边**代表一个**变量**；
每个**点v**上指定一个来自**函数集$\mathcal{F}$**的**复函数f_v**，
其自变量来自v关联的边子集$E(v)$

目标是计算一个**积之和**，
每一项对应在所有变量的每一种**0-1赋值σ**下
所有函数值的乘积。

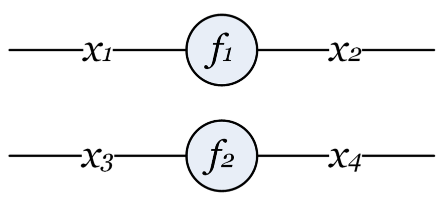
$$\mathrm{Holant}_\Omega(\mathcal{F}) = \sum_{\sigma: E\to\{0,1\}} \prod_{v\in V} f_v(\sigma|_{E(v)})$$



例：完美匹配计数问题（#PM）实例

函数的矩阵表示与张量积

张量网格中，函数和矩阵有自然的对应关系



$$M_{f_1(x_1,x_2)} = \begin{bmatrix} f_1(0,0) & f_1(0,1) \\ f_1(1,0) & f_1(1,1) \end{bmatrix}$$ （$M_{f_2(x_3,x_4)}$类似）

两个函数并排放置组合成的新函数，
其矩阵表示即为两个矩阵的张量积。

$$M_{f_1\otimes f_2} = M_{f_1} \otimes M_{f_2}$$

本文成果1：推广的分解引理

Holant$(\mathcal{F}, f, g) \equiv_T$ **Holant**$(\mathcal{F}, f \otimes g)$
成立，除非$\mathcal{F}\cup\{f\otimes g\}$满足一些具体要求，
此时Holant$(\mathcal{F}, f\otimes g)$为$\mathrm{FP}^{\mathrm{NP}}$或#P-hard，
判定条件是显式的。

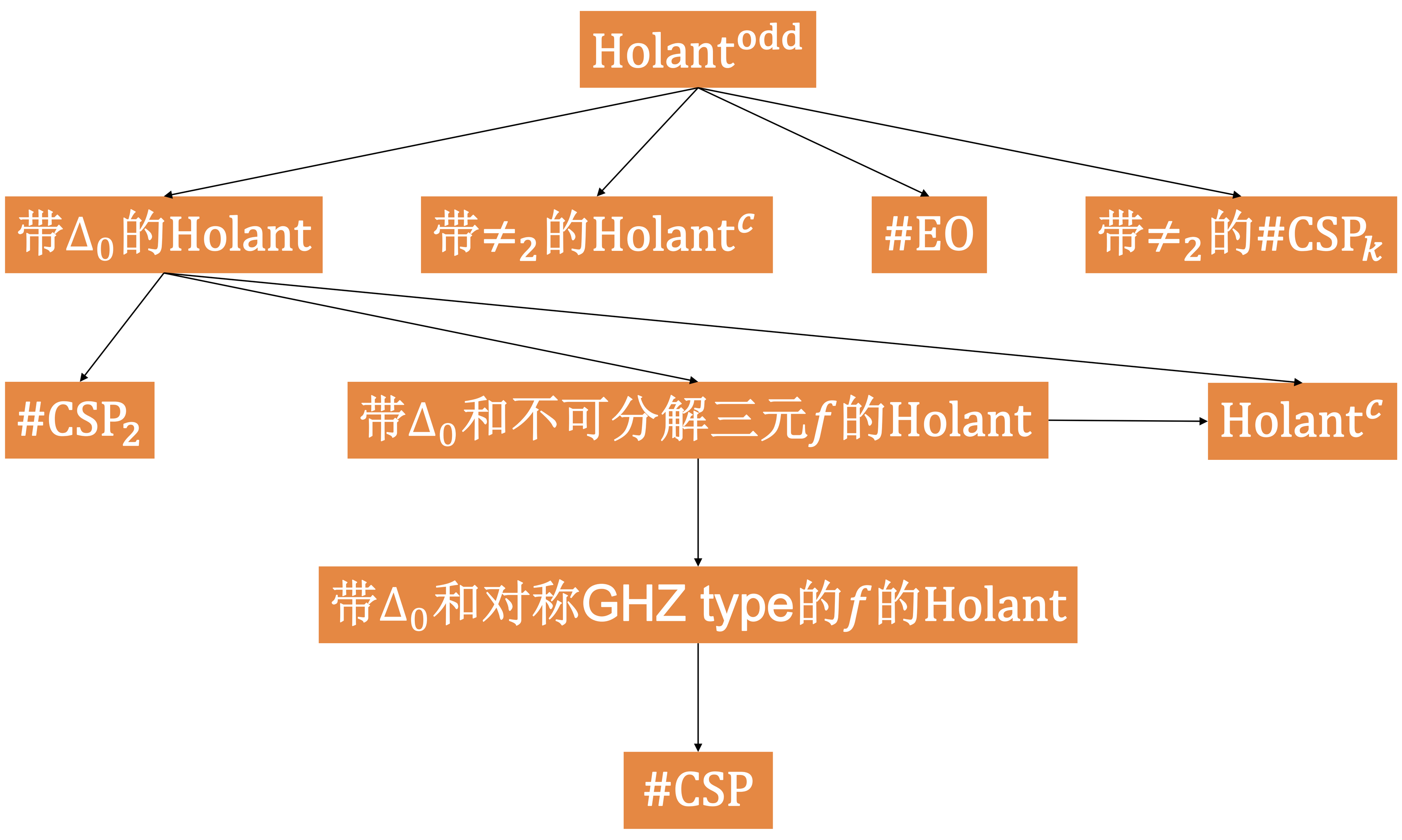
本文成果2：$\mathrm{Holant}^{\mathrm{odd}}$复杂性二分定理

设$\mathcal{F}$是一个函数集合，其中包含一个**非平凡的、奇数个自变量的函数**。
那么**Holant**$(\mathcal{F})$ **要么属于$\mathrm{FP}^{\mathrm{NP}}$，要么为#P-hard**，判定条件是显式的。

其中NP神谕由#EO的二分定理 [1][2] 引入，是否可消除仍待解决。

此前已有实函数的完整Holant二分定理 [3]
和复函数的Holant^c（即包含两个特殊一元函数Δ_0和Δ_1的Holant）二分定理 [4]，
我们的证明向着复函数的完整Holant二分定理更进一步！

证明思路



参考文献

[1] Boning Meng, Juqiu Wang, and Mingji Xia, "P-Time Algorithms for Typical #EO Problems." ICALP 2025. https://doi.org/10.4230/LIPIcs.ICALP.2025.118
[2] Boning Meng, Juqiu Wang, and Mingji Xia, "The $\mathrm{FP}^{\mathrm{NP}}$ versus #P Dichotomy for #EO." STOC 2025. https://doi.org/10.1145/3717823.3718135
[3] Shuai Shao and Jin-Yi Cai, "A Dichotomy for Real Boolean Holant Problems." FOCS 2020. https://doi.org/10.1109/FOCS46700.2020.00105
[4] Miriam Backens, "A Full Dichotomy for Holant^c, Inspired by Quantum Computation." SIAM Journal on Computing, vol. 50, no. 6, pp. 1739-1799, 2021. https://doi.org/10.1137/20M1311557