The FP^{NP} versus #P Dichotomy for #EO

带权欧拉定向计数问题的计算复杂性

孟泊宁，王琚秋，夏盟佶

STOC 2025

联系方式：王琚秋 18810087862 | wangjq21@ios.ac.cn

摘要

计数问题中表达能力最强的问题框架——复数值Holant问题类的复杂性分类问题自提出以来已有十五年，是精确计数领域最重要的开放问题之一。研究者们前赴后继，完成了许多子定理的证明。而复数权重欧拉定向计数问题类（#EO）被公认为是解决最终问题最大的挑战之一。本文给出了#EO问题类的FP^{NP}与#P二分定理，证明了一个由给定函数集合定义的#EO问题，要么是#P难的，要么可多项式时间图灵归约至SAT问题。这一结果给出了#EO问题类完整的复杂性划分，并有可能最终推动Holant问题类的复杂性分类定理的证明。基于#EO问题类的二分定理，我们进一步给出了上偏函数、下偏函数和单输入权重函数定义的Holant问题类的复杂性二分定理。

欧拉图：所有点的度数均为偶数的图

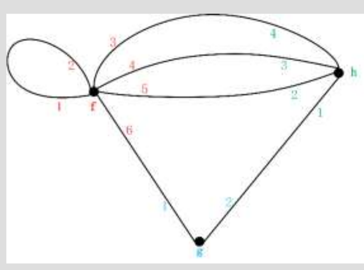
欧拉定向：一个欧拉定向给无向图的每条边确定一个方向，使得每个点出度等于入度。

基本定义

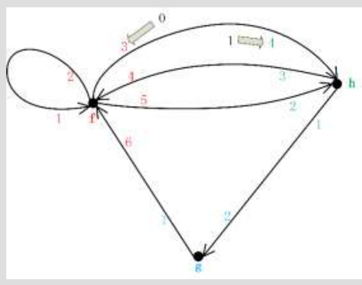
一个2d元复数值布尔函数f是一个从$\{0,1\}^{2d}$到$\mathbb{C}$的映射。如果任意满足$f(\alpha)\neq 0$的α的汉明重量（即1的数量）均为d，f则被称为EO函数。

一个#EO问题由一个EO函数集合$\boldsymbol{F}$定义。

一个定义在$\boldsymbol{F}$上的EO函数网格$\Omega=(G,\pi)$包含一个欧拉图$G=(V,E)$和一个映射π。其中π为每个顶点v上分配了一个$\boldsymbol{F}$中的函数f_v，并为其邻边规定了一个顺序，使之一一对应于f_v的所有变量。



EO(G)：G的所有欧拉定向组成的集合。每条边的两端对应两个变量。每个欧拉定向对应所有变量的一组赋值，具体规则是有向边指向的那一端所代表的变量被赋值为1，而另一端被赋值为0。



问题定义

#EO($\boldsymbol{F}$)的定义如下：

输入: 一个定义在F上的函数网格$\Omega=(G,\pi)$；

输出: Ω的配分函数

$$\#\mathrm{EO}_\Omega=\sum_{\sigma\in \mathrm{EO}(G)}\prod_{v\in V} f_v(\sigma|_{E(v)})$$

主定理

$\boldsymbol{F}$是一个EO函数集合，则#EO($\boldsymbol{F}$)要么在FP^{NP}里，要么是#P-难的。 判定条件以显式性质(QT)给出。

研究动机

1. 对于一个计数问题，研究其计算复杂性是非常自然且有趣的。
2. #EO问题类的复杂性分类定理会为Holant问题类的复杂性分类奠定坚实的基础，而后者是计数问题最一般的问题框架，具备最强的表达能力。
3. #EO问题类可以在多项式时间归约意义下模拟所有的布尔定义域复数值#CSP问题类，其本身就具有极强的表达能力。

某种意义下，解决#EO是无法逃避的！

易解类刻画

前置定义：

$\#_i(\alpha)$是α中i的个数，i=0或1。

$HW^{=}:=\{\alpha\in\{0,1\}^*|\#_0(\alpha)=\#_1(\alpha)\}$。

$HW^{<}$, $HW^{>}$ 类似定义。

一个EO函数f满足$\mathrm{supp}(f)\subseteq HW^{=}$

$\mathrm{supp}(f):=\{\alpha\in\{0,1\}^*|f(\alpha)\neq 0\}$。

3-span(f):=$\{\alpha\oplus\beta\oplus\gamma|\alpha,\beta,\gamma\in\mathrm{supp}(f)\}$。

($\oplus$: 逐位异或)

三上函数: 3-span(f)-supp(f)$\subseteq HW^{>}$

三下函数: 3-span(f)-supp(f)$\subseteq HW^{<}$

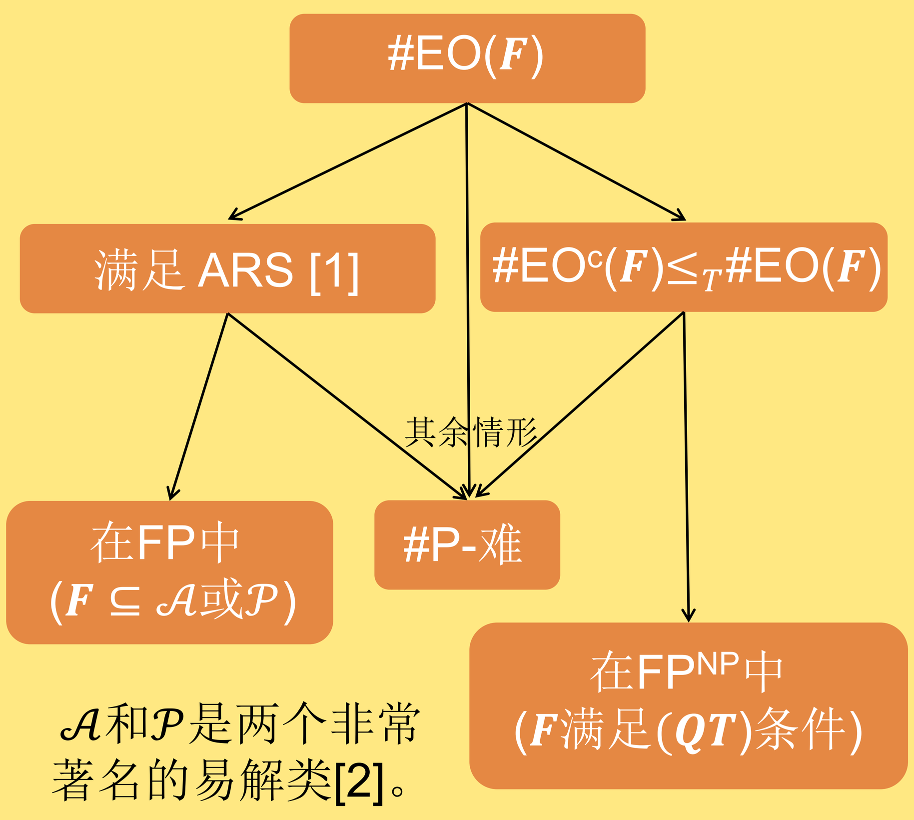
性质 (QT):

F中所有函数全是三上函数或者全是三下函数

+

额外的函数值要求

证明简图



$\mathcal{A}$和$\mathcal{P}$是两个非常著名的易解类[2]。

证明灵感

函数支撑集（supp）的性质非常重要！

在以往的研究中，有很多与支撑集有关的性质

导出了计数问题的多项式时间易解性。

布尔#CSP：仿射支撑集[3]

对称Holant：vanishing函数 [4]

#EO中的新易解类：三上和三下

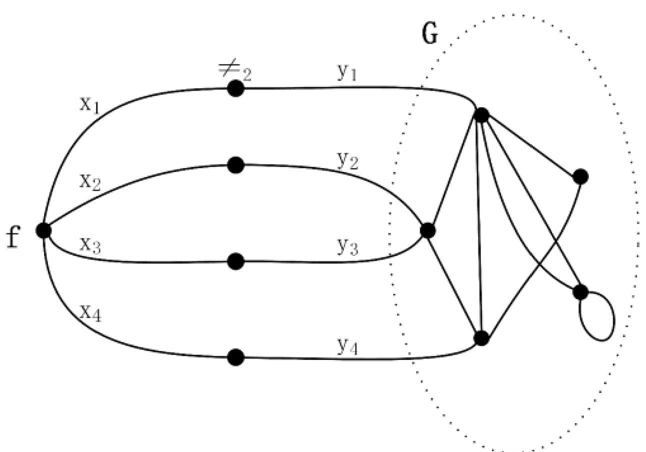
FP^{NP}的灵感来源：有效支撑集

右图是一个输入实例Ω.

所谓有效，是指一个变量赋值可能对配分函数有非零贡献。

假设α,β,γ是三个有效赋值.

它们限制在f上分别是$\alpha_f,\beta_f,\gamma_f$.



假设所有函数都是三上的。

那么$\alpha_f\oplus\beta_f\oplus\gamma_f\in HW^{>}$，由于三上性质的封闭性，我们还有$\alpha_G\oplus\beta_G\oplus\gamma_G\in HW^{>}\cup HW^{=}$.

但因为所有的x_i,y_j中0和1个数总是相等，且这一性质在三个串逐位异或后仍然保持，从而得到矛盾！

因而$\alpha_f,\beta_f,\gamma_f$中至多只有两个有效，我们可以用一个NP神谕来找出它们。

开放问题

1. 以FP^{NP}与#P为划分标准给出布尔定义域复值Holant问题类的复杂性分类定理。
2. 搞清楚调用的NP神谕的计算复杂性。（通向以FP与#P为划分标准的复杂性分类定理）

一个例子：f_{56}是一个56元函数，supp(f_{56})仅包含5个串

	*4										*3				
0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1

绿色块重复4遍，蓝色块重复3遍。

是三上函数。#EO(f_{56})在FP^{NP}里。

对应的判定问题Edge-CSP($\neq_2$ |f_{56})是NP-难的还是在P里？

参考文献

[1] Jin-Yi Cai, Zhiguo Fu, and Shuai Shao. 2020. Beyond #CSP: A dichotomy for counting weighted Eulerian orientations with ARS. doi:10.1016/j.ic.2020.104589

[2] Jin-Yi Cai, Pinyan Lu, and Mingji Xia. 2014. The complexity of complex weighted Boolean #CSP. doi:10.1016/j.jcss.2013.07.003

[3] Creignou N, Hermann M. Complexity of generalized satisfiability counting problems. doi:10.1006/inco.1996.0016

[4] Jin-Yi Cai, Heng Guo, Tyson Williams. A complete dichotomy rises from the capture of vanishing signatures. doi:10.1145/2488608.2488687

论文全文：https://arxiv.org/abs/2502.02012