

From an odd arity signature to a Holant dichotomy

带奇数元函数的Holant问题二分定理

孟泊宁, 王踞秋, 夏盟佶, 郑加毅

CCC 2025

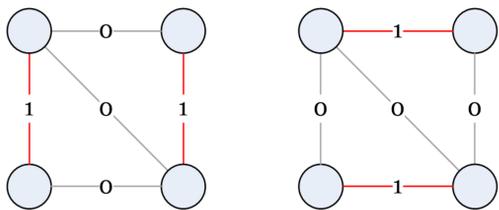
联系方式: 郑加毅 zhengjy@ios.ac.cn

Holant: 定义在图上的计数问题

在张量网络 Ω 上,
每条边代表一个变量;
每个点 v 上指定一个来自函数集 \mathcal{F} 的复函数 f_v ,
其自变量来自 v 关联的边子集 $E(v)$

目标是计算一个积之和,
每一项对应在所有变量的每一种**0-1赋值** σ 下
所有函数值的乘积。

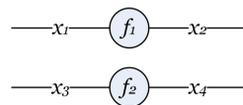
$$\text{Holant}_{\Omega}(\mathcal{F}) = \sum_{\sigma: E \rightarrow \{0,1\}} \prod_{v \in V} f_v(\sigma|_{E(v)})$$



例: 完美匹配计数问题 (#PM) 实例

函数的矩阵表示与张量积

张量网络中, 函数和矩阵有自然的对应关系



$$M_{f_1(x_1, x_2)} = \begin{bmatrix} f_1(0,0) & f_1(0,1) \\ f_1(1,0) & f_1(1,1) \end{bmatrix} \quad (M_{f_2(x_3, x_4)} \text{类似})$$

两个函数并排放置组合成的新函数,
其矩阵表示即为两个矩阵的张量积。

$$M_{f_1 \otimes f_2} = M_{f_1} \otimes M_{f_2}$$

本文成果1: 推广的分解引理

$\text{Holant}(\mathcal{F}, f, g) \equiv_T \text{Holant}(\mathcal{F}, f \otimes g)$
成立, 除非 $\mathcal{F} \cup \{f \otimes g\}$ 满足一些具体要求,
此时 $\text{Holant}(\mathcal{F}, f \otimes g)$ 为 FP^{NP} 或 $\#P\text{-hard}$,
判定条件是显式的。

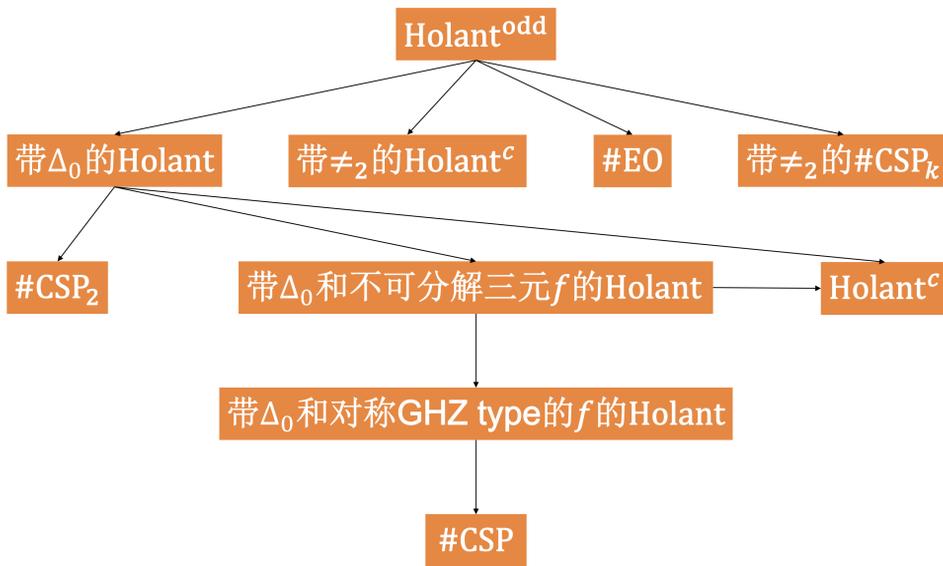
本文成果2: Holant^{odd}复杂性二分定理

设 \mathcal{F} 是一个函数集合, 其中包含一个非平凡的、奇数个自变量的函数。
那么 $\text{Holant}(\mathcal{F})$ 要么属于 FP^{NP} , 要么为 $\#P\text{-hard}$, 判定条件是显式的。

其中NP神谕由#EO的二分定理 [1][2] 引入, 是否可消除仍待解决。

此前已有实函数的完整Holant二分定理 [3]
和复函数的Holant^c (即包含两个特殊一元函数 Δ_0 和 Δ_1 的Holant) 二分定理 [4],
我们的证明向着复函数的完整Holant二分定理更进一步!

证明思路



参考文献

- [1] Boning Meng, Juqiu Wang, and Mingji Xia, "P-Time Algorithms for Typical #EO Problems." ICALP 2025. <https://doi.org/10.4230/LIPIcs.ICALP.2025.118>
- [2] Boning Meng, Juqiu Wang, and Mingji Xia, "The FP^{NP} versus #P Dichotomy for #EO." STOC 2025. <https://doi.org/10.1145/3717823.3718135>
- [3] Shuai Shao and Jin-Yi Cai, "A Dichotomy for Real Boolean Holant Problems." FOCS 2020. <https://doi.org/10.1109/FOCS46700.2020.00105>
- [4] Miriam Backens, "A Full Dichotomy for Holant^c, Inspired by Quantum Computation." SIAM Journal on Computing, vol. 50, no. 6, pp. 1739-1799, 2021. <https://doi.org/10.1137/20M1311557>